ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ

1) Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει: f(x)-f(x-1)=6x-3 για κάθε x∈R και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sqrt{x+1}}{x}=-\frac{1}{2}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να βρείτε τους αριθμούς f’(0) και f’(1).

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln(ax)}{x}$ με α>0 και x>0

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$

ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ καθώς μεταβάλλεται το α, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

3) Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)+xy+a$ για κάθε x,y∈R

i) Να αποδείξετε ότι f(0)=-α

ii) Να αποδείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων

iii) Να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=f(x_0)+f'(0)\cdot e^{x_0}+x_0$ για κάθε $x_0\in R$.

4) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και τέτοια ώστε f(1)<f(5)<f(3). Να δείξετε ότι:

i) Η f δεν είναι ‘’1-1’’.

ii) Υπάρχει ξ ∈ R τέτοιο ώστε f’(ξ)=0.

5) Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0$.

i) Να δείξετε ότι η $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, x>0 είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{1}{x}(f'(x)-\frac{f(x)}{x})$.

ii) Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, να δείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

6) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,\beta]$.

7) i) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $f(x)=(2-2x-x^2-x^3)e^x-2$.

ii) Να βρείτε τον $\lambda\in R$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+1$ να εφάπτεται στη C_g της $g(x)=(x^2+2)e^x-1$.

8) Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε: $f(f'(x))\geq(x-1)^2$ για κάθε $x\in R$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για x=1 και f(0)=0, να δείξετε ότι $f''(1)=0$

9) i) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $a^{a+1}>(a+1)^a$ για κάθε α>e.

iii) Να αποδείξετε ότι για x>0 ισχύει $2^x=x^2\Leftrightarrow f(x)=f(2)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x=x^2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$, $x_2=4$.

10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ και g(x)=2x+f(x)

i) Να αποδείξετε ότι lnx<x, για κάθε x∈(0,+∞)

ii) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞)

iii) Να μελετήσετε την g ως προς τα κοίλα, τα κυρτά και τα σημεία καμπής

iv) Να εξετάσετε τη θέση της g ως προς την ευθεία ε:y=2x.

v) Να βρείτε ένα σημείο x_0, στο οποίο η εφαπτομένη της C_g να είναι παράλληλη προς την ευθεία ε: y=2x.